



Szacowanie wartości godziwej przy wycenie bilansowej lokata zawierających akcje notowane na giełdzie*

*JURIJ RENKAS ***

Streszczenie

Ideą prezentowanych w niniejszym artykule badań jest dostarczenie odbiorcy informacji sprawozdawczej dotyczącej wyceny lokaty akcyjnej najbardziej odpowiedniej do jego oczekiwań. Celem publikacji jest omówienie w aspektach teoretycznych algorytmicznej metody wyceny lokat akcyjnych według wartości godziwej i przedstawienie sposobu jej wykorzystania za pomocą przykładu liczbowego. Proponowana metoda wykorzystuje podejście statystyki nieparametrycznej i wybór normalnej funkcji jądra. Zastosowano trzy podejścia do szacowania wartości godziwej lokat akcji: (a) obliczenie wartości godziwej na podstawie danych z końca roku sprawozdawczego, (b) obliczenie wartości godziwej na koniec roku, ale po dołączeniu danych z miesiąca stycznia, (c) obliczenie wartości godziwej na koniec okresu notowań dołączonych (31.01.). Do obliczeń i ilustracji prezentowanej koncepcji wyceny posłużyły notowania akcji spółki akcyjnej KĘTY. Wyniki badań wskazały, że jako wartość godziwej wyceny należy przyjąć kwotę wyznaczoną na podstawie zastosowania wygładzonej regresji nieparametrycznej obliczoną bazującą na danych do drugiego stycznia roku następnego włącznie. Natomiast wartość obliczoną na koniec stycznia kolejnego roku proponuje się umieścić w informacji dodatkowej, aby korzystający ze sprawozdania uzyskał pogląd odnośnie do trendu. Prezentowana metoda jest oryginalnym podejściem do szacowania wartości godziwej przy wycenie bilansowej lokat zawierających akcje notowane na giełdzie.

Słowa kluczowe: wycena lokat akcji, wartość godziwa, kwota wygładzona.

Abstract

Estimation of fair value at balance sheet valuation of a joint-stock deposit listed on the stock exchange

The idea behind the research presented in this article is to provide the recipient with reporting information on the valuation of a joint-stock deposit most appropriate to their expectations. The aim of the publication is to discuss theoretical aspects of the algorithmic method of valuation of equity investments at fair value and to present how to use it using a numerical example. The proposed method uses the non-parametric approach and selection of the normal kernel function. Three approaches to estimating the fair value of equity investments were used: (a) calculation of fair value based on data from the end of the reporting year, (b) calculation of fair value at the end of the year, but after the inclusion of data from the month of January, (c) fair value calculation at the end period of attached listings (31 January). The quotations of shares of

* Artykuł został sfinansowany z grantu dla młodych naukowców na Wydziale Zarządzania Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.

** Dr Jurij Renkas, adiunkt, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Rachunkowości, ORCID: 0000-0001-7139-5458, renkasj@uek.krakow.pl



the joint-stock company KĘTY were used to calculate and illustrate the presented valuation concept. The research results indicated that the fair value of non-parametric regression calculated on the basis of the data until January 2 of the following year, inclusive, should be used as the fair value of the valuation. On the other hand, the value calculated at the end of the month of January of the following year is proposed to be included in the notes to the financial statements to allow the users of the report to gain an opinion about the trend. The presented method is an original approach to the estimation of fair value at the balance sheet valuation of investments containing shares listed on the stock exchange.

Keywords: valuation of shares, fair value, amount smoothed.

Wprowadzenie

Problematyka wyceny bilansowej należy do najważniejszych kwestii rachunkowości. Mimo jej ważnej roli opracowanie uniwersalnej i w pełni akceptowalnej metody wyceny jest właściwie nieosiągalne. Wynika to z natury wartości, która stanowi miarę koncentracji kapitału w obiekcie podlegającym wycenie (Dobija, 2018). Jak wiadomo, przy ustalaniu wartości akcji na dzień bilansowy ma zastosowanie ogólna metoda wyceny według wartości rynkowej lub według ceny nabycia, zależnie od tego, która z nich jest niższa (zasada “niższy koszt bądź wartość rynkowa”). Jednak w literaturze przedmiotu istnieje już szereg publikacji zajmujących się tematyką doskonalenia metody wyceny akcji na dzień bilansowy. W szczególności znane są propozycje zastosowania wygładzania wykładniczego do wyznaczania kwoty wyceny bilansowej (Dobija, 1989; Renkas, 2011; Jędrzejczyk, 2008, 2011; Bielawski, 2013), w których określono kompletną procedurę.

M. Dobija (2018) zaznacza, że kapitał jako wielkość abstrakcyjna i potencjalna zdolność do wykonania pracy ulega naturalnemu i spontanicznemu rozpraszaniu. Nie jest zatem możliwe jednoznaczne ustalenie zawartości kapitału w aktywach na dowolny dzień. Można natomiast poszukiwać metod szacowania wartości bilansowej akcji korzystając z szeregu dostępnych danych, kreowanych przez giełdę. Wbrew pozorom i różnym przekonaniom, wartość giełdowa akcji na dzień 31 grudnia nie może stanowić dobrego oszacowania wartości godziwej. Ta wartość nie gwarantuje wysokiego prawdopodobieństwa, że w pierwszych dniach stycznia będzie zbliżona do tej z 31 grudnia. Ponadto giełdy zwykle nie podają wartości na 31 grudnia i 01 stycznia. Posiadając ciąg wartości akcji z notowań giełdowych można natomiast stosować teorię optymalnej estymacji, która stanowi owoc naukowego myślenia.

Przedstawiając wycenę pozycji aktywów na dzień sprawozdawczy wskazujemy miarę wartości, która odzwierciedla koncentrację kapitału w wycenianym rodzaju aktywów. Nie jest to proste, więc zagadnienie wartości godziwej jest wciąż aktualnym tematem, żywo dyskutowanym przez wielu autorów. Dążenia do doskonalenia wyceny bilansowej znalazły wyraz w standardach rachunkowości. W szczególności od 1 stycznia 2013 roku wprowadzono standard MSSF 13 *Wycena w wartości godziwej* (Międzynarodowe Standardy, 2016). Zgodnie z tym standardem można przyjąć w małym uproszczeniu, że wartość godziwa to cena, jaką można osiągnąć, przy sprzedaży danego

składnika aktywów uczestnikowi rynku podstawowego na dzień wyceny w rutynowej transakcji. Mogłoby się wydawać, że wycena akcji w wartości godziwej nie powinna stwarzać większych problemów teoretycznych i praktycznych. Przeczą tej opinii prace M. Rówińskiej (2011), P. Bielawskiego (2013), A. Hołdy (2013) i inne, ujawniając liczne kontrowersje związane z wyceną akcji i innych instrumentów finansowych w różnych aspektach wyceny bilansowej przy zastosowaniu wartości godziwej.

Celem niniejszej publikacji jest omówienie w aspektach teoretycznych algorytmicznej metody wyceny lokat akcyjnych według wartości godziwej i przedstawienie sposobu jej wykorzystania za pomocą przykładu liczbowego. Zastosowana metoda naukowa to analiza teoretyczna z wykorzystaniem statystyki nieparametrycznej i wybór normalnej funkcji jądra. W artykule przedstawia się zatem teoretycznie uzasadnione podejście do wyceny bilansowej akcji z praktycznym zastosowaniem. W mniemaniu autora ta metoda prowadzi do wartości godziwej. Na tej kwestii skupia się analiza teoretyczna zagadnienia i prezentowana metoda szacowania wartości odpowiedniej do wyceny bilansowej, co przemawia za przydatnością proponowanego modelu w praktyce.

1. Kontrowersje związane z wyceną akcji przy zastosowaniu wartości godziwej

Można by oczekiwać, że akcje będą pozycją bilansową, której łatwo jest przypisać wartość godziwą ze względu na to, że są notowane na giełdach, czyli dobrze funkcjonującym rynku. Przyjęcie wartości wyznaczonej na giełdzie na dzień bilansowy jest najprostszą procedurą, która naturalnie spełnia wymogi określone przez wartość godziwą. Ale i w tym przypadku rodzą się wątpliwości. Co to znaczy dla aktywnego użytkownika informacji, który w bilansie odczytuje, że spółka posiada lokatę w akcjach o wartości powiedzmy 175 000 zł i wiadomo, że wycena pochodzi z notowań na 31 stycznia? Czy nie okaże niezadowolonia z tej informacji mówiąc, że teraz (w lutym) ta wartość jest już mało warta? Jak podkreśla A. Hołda (2013, s. 144–145): „Z oczywistych przyczyn odbiorca informacji (poza jej twórcą) ma do niej dostęp, gdy warunki rynkowe uległy już zmianie i w konsekwencji *bieżąca* wartość godziwa, tj. otrzymywana w momencie otrzymywania danych, może różnić się od *historycznej* wartości godziwej, tj. tej, która podlega ujawnieniu na dzień sporządzania informacji [...]”. Autor zwraca także uwagę, że wycena w wartości godziwej może ujawniać korzyści (s. 145) o charakterze nierealizowalnym, potencjalnym, które będą wykazywane w wyniku finansowym, co sprawia, że powstaje możliwość ich podziału. Autor podkreśla dalej, że prospektywny charakter informacji z systemu rachunkowości jest niezbywalną kwestią, zależną jednak od kategorii, i powinien się łączyć z użytecznością generowanej informacji. Jak wiadomo obecne tendencje regulacyjne preferują wycenę prospektywną dla instrumentów finansowych.

M. Rówińska (2011) w swojej monografii prowadzi obszernie rozważania na temat wartości godziwej w zakresie instrumentów finansowych. W części (Rówińska, 2011, s. 38–46) dotyczącej wartości godziwej w kontekście nadrzędnych zasad rachunkowości

autorka stawia wiele pytań. W szczególności bada zagadnienie zgodności wyceny według wartości godziwej z naczelną zasadą rachunkowości, którą jest *true and fair view*. Autorka cytuje E. Śnieżek i M. Wiatra (2010, s. 252–253), którzy oczekują przede wszystkim przestrzegania fundamentalnej zasady *true and fair view* w celu odbudowania zaufania do informacji prezentowanych w sprawozdaniach nadwyřężonego praktykami rachunkowości agresywnej.

Cytowani autorzy podnoszą ważne zagadnienia, tym niemniej należałoby zauważyć, że *true and fair view* nie jest podstawową zasadą rachunkowości finansowej, jak zasada dualizmu, historycznego kosztu nabycia, czy też współmierności (Anthony i in., 2011). Nie jest też jedną z zasad fundamentalnych, jak zasady termodynamiki bądź zasada minimalnego działania (Kurek, Dobija, 2013) wszechobecna w naukach ekonomicznych i rachunkowości zarządczej. *True and fair view* stanowi ogólny postulat, na tyle ogólny, że dotyczący całego życia społeczno-ekonomicznego. Należy być wiarygodnym i postępować *fair* we wszystkich sytuacjach w cywilizowanym świecie. Gdy sporządzający sprawozdanie finansowe świadomie zawyżą wycenę z intencją osiągnięcia korzyści, to działają niezgodnie z postulatem *true and fair*. Ale ten postulat nie stanowi podstawowej zasady rachunkowości na miarę zasady dualizmu, której istotę naświetlają autorzy, jak Y. Ijiri (1993), M. Dobija (2009), B. Kurek, M. Dobija (2013) i inni. Jest sporo zasad rachunkowości finansowej, Anthony i in. (2011) zestawiają ich 11, ale nie ma wśród nich *true and fair view*. Jest to pożądana cecha jakościowa informacji, a przede wszystkim oczekiwana postawa w odniesieniu do sporządzających sprawozdanie finansowe.

Jednakże działając w zgodzie z zasadą *true and fair view* dochodzi się do przekonania, że wycena akcji nawiązująca do wartości godziwej powinna wyznaczać wartość nieoderwaną od danych historycznych, ale nieopartą na konkretnej jednej rzeczywistej wartości akcji zaczerpniętej z danych giełdowych. Jak wiadomo, pojedyncze dane charakteryzuje duża nieprzewidywalna zmienność, więc przedstawienie użytkownikowi tego rodzaju wyceny musi być dalekie od istoty wartości godziwej. Tym niemniej ciąg danych historycznych ma atrybut prognostyczny dla rozsądnie określonego przedziału czasu. Zatem nie wartość z ostatnich notowań, lecz wartość ze zbioru danych historycznych może pretendować do wartości godziwej, której prospektywny charakter został nadany przy zastosowaniu odpowiednio dobranego modelu matematycznego. Nasuwa się więc wniosek, że właściwe podejście do rozwiązania problemu wyceny akcji może dokonać się w koncepcji *marking to model*, a nie *marking to mark* (Hołda, 2013, s. 142).

2. Procedura szacowania wartości godziwej akcji na podstawie ciągu notowań

Skoro kapitał jest z natury abstrakcyjny, a wycena polega na określeniu miary kapitału w danym rodzaju aktywów, to jest to problem, którego rozwiązanie wymaga metod matematycznych. Kategorie abstrakcyjne można ujmować tylko przy zastosowaniu innych kategorii abstrakcyjnych, których dostarcza matematyka. Nie należy jednak tracić

z pola widzenia, czym jest akcja. Jako udział własności w przedsiębiorstwie podlega mechanizmom wzrostowym jak kapitał własny, o czym informuje wskaźnik ROE. Z drugiej zaś strony podlega siłom popytu i podaży, które bynajmniej nie są tylko rynkowe. Zależą bowiem od decyzji podejmowanych w Banku Centralnym w sprawie podstawowej stopy procentowej, emisji pieniądza w aspekcie deflacji bądź inflacji. Jeśli banki komercyjne mogą pozyskiwać pieniądze przy niskiej stopie procentowej, to ten fakt wywiera wpływ na giełdową wartość akcji. W związku z tym, że wartość akcji jest wynikiem wielu różnokierunkowych oddziaływań, szacowanie wartości akcji na dany moment wymusza uwzględnienia szeregu danych historycznych, czyli ciągu notowań giełdowych akcji a_1, \dots, a_n , gdzie ostatnia wielkość pochodzi z ostatniego dnia roku obrotowego. Wykorzystanie ciągu wartości historycznych nawiązuje do zasady kosztu historycznego, pozostaje natomiast spełnienie wymogów określonych zasadą ostrożnej wyceny. W tym zakresie proponuje się nowe rozwiązanie, zamiast uwzględnienia pojedynczego notowania stosuje się regresję pierwszego rodzaju, czyli formuły warunkowej wartości oczekiwanej dla modyfikacji ostatniego notowania w kierunku wartości godziwej, bardziej wiarygodnej dla odbiorców.

Poszukiwanie teoretycznego rozwiązania problemu szacowania wartości godziwej akcji na wyznaczony dzień sprawozdawczy stwarza zatem określone wymogi. Podstawowe postulaty, które muszą być spełnione, są następujące:

- w modelu estymacji musi być uwzględniony ciąg historycznych notowań: a_1, a_2, \dots, a_n ;
- w modelu nie jest dopuszczalny wybór określonego kształtu funkcji, co wyklucza model regresji liniowej drugiego rodzaju;
- procedura szacowania wartości godziwej powinna być zgodna z twierdzeniem o optymalnej estymacji.

Twierdzenie o optymalnej estymacji stanowi, że absolutnie najlepsze przybliżenie zmiennej losowej X spełniającej warunek $E(X^2) < \infty$, w sensie minimum błędu średniokwadratowego, zapewnia wielkość zwana warunkową wartością oczekiwaną (WVO) (Dobija, 1988, s. 109–110). Ta wartość średnia jest funkcją rzeczywistych pomiarów. Zatem:

$$WVO = G(y_1, \dots, y_n) = E(X|Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n) \quad (1)$$

gdzie:

E – oznaczenie wartości średniej (oczekiwanej),

Y_1, \dots, Y_n stanowi układ warunkujących zmiennych losowych,

y_1, \dots, y_n zestaw wartości zmiennych Y_1, \dots, Y_n .

Zgodnie z ustalonymi postulatami i przytoczonym twierdzeniem o optymalnej estymacji wnioskuje się, że dochodzenie do wartości godziwej przy uwzględnieniu wspomnianego ciągu wartości wymaga zastosowania nieparametrycznych, gładkich rozkładów prawdopodobieństwa, które pozwalają posługiwać się WVO określoną wzorem (1). Ciągły i gładki rozkład układu zmiennych losowych, sposobny do celów optymalnej

estymacji wielkości ekonomicznych, został określony w monografii (Dobija, 1988, s. 79–87). Jest to rozkład nieparametryczny z normalną funkcją jądra. Normalność funkcji jądra oznacza postępowanie według zasady maksimum entropii¹, czyli minimalizacji wprowadzania subiektywnych informacji. Zastosowanie gęstości rozkładu normalnego jako funkcji jądra nie jest naruszeniem wyżej przedstawionych postulatów, wiadomo bowiem, że tylko ten wybór maksymalizuje entropię. Dodatkowe korzyści to prostota obliczeń.

Procedura szacowania wartości akcji przy zastosowaniu nieparametrycznej regresji pierwszego rodzaju spełnia określone wcześniej wymogi optymalnej estymacji. Optymalność oznacza tutaj, że minimalizuje się średni błąd kwadratowy. Nie jest to jednak wystarczające przy dążeniu do wartości godziwej w aspekcie odbiorcy informacji sprawozdawczej. Ten postulat można zrealizować wykorzystując odpowiednio historyczne notowania. W tym zakresie proponuje się powiększenie zbioru historycznych danych o następny okres. W typowym przypadku są to dane ze stycznia.

Ta propozycja wiąże się z przyjęciem punktu widzenia odbiorcy informacji ze sprawozdań. Jeśli sprawozdania stają się dostępne najwcześniej w lutym, a zwykle dużo później, to wiadomo, że na informację, której oczekuje odbiorca powinny wpłynąć dane ze stycznia. Jest to pewna analogia do przebiegu badania sprawozdania finansowego przez biegłych rewidentów, którzy uwzględniają zdarzenia występujące po dacie bilansowej dla uzyskania pełniejszej oceny. Można sobie wyobrazić, że wartość posiadanych akcji przez firmę spadła gwałtownie 5 stycznia następnego roku. Uwzględnienie danych styczniowych pozwoli zmodyfikować wycenę unikając przez to dezinformacji. Warto dodać, że wyjaśnienie, iż notowania uwzględniały tylko grudzień nie usprawiedliwia faktu, że wycena nie może być satysfakcjonująca.

3. Formuły matematyczne i podejścia stosowania warunkowej wartości oczekiwanej w wycenie

Podstawą formuł matematycznych WWO jest dystrybucja empiryczna wielowymiarowej zmiennej losowej i odpowiednia funkcja gęstości. Artykuł (Dobija, 1982) zawiera dowód zbieżności tej dystrybucji i uzasadnienie wykorzystania rozkładu normalnego jako funkcji jądra.

Na tej podstawie oblicza się gęstości brzegowe i gęstości warunkowe oraz wyznacza się wariancję σ^2 , która jest estymatorem nieobciążonym i przedstawia się wzorem:

$$\sigma^2 = \frac{s^2}{n-1} \quad (2)$$

gdzie:

wielkość s^2 oznacza znaną statystykę wariancji z próby.

¹ Mowa o entropii informacyjnej wprowadzonej przez C. Shanona.

Mając do dyspozycji wszystkie rodzaje gęstości wielowymiarowej zmiennej losowej przekształca się ciąg notowań w układ zmiennych losowych tworząc pełną liczbę podciągów² (Dobija, 1989). Niech ciąg a_1, a_2, \dots, a_n stanowi element szeregu czasowego wartości notowań akcji. Obieramy stosowne $k < n$ i metodą podciągów pełzających sporządzamy tabelę wartości układu zmiennych losowych A_1, A_2, \dots, A_k . Przyjmując, że $k = 5$, uzyskuje się wartości zmiennych losowych A_1, A_2, \dots, A_5 , jak w tabeli 1.

Tabela 1. Układ zmiennych losowych reprezentujący szereg czasowy

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_2	a_3
a_3	a_4
a_4	a_5
...
a_{n-4}	a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n

Źródło: opracowanie własne (dotyczy wszystkich tabel).

Na podstawie danych z tabeli 1 utworzonej z rynkowych wartości akcji można dokonywać rachunków, na które pozwala teoria statystyki, w szczególności obliczać warunkowe wartości oczekiwane, przy różnych zadanych uwarunkowaniach. Podejście nieparametryczne pozwala na obliczenia bez identyfikowania typu rozkładu prawdopodobieństwa. To ogólne postępowanie można dostosować do potrzeb szacowania wartości godziwej akcji.

Notowania akcji, które służą do obliczeń i ilustracji koncepcji wyceny dotyczą spółki akcyjnej KĘTY. Notowania pochodzą z przełomu dwóch lat – z listopada i grudnia 2018 roku oraz ze stycznia 2019 roku. Po zestawieniu danych uzyskujemy tabelę 2.

Tabela 2. Notowania akcji spółki KĘTY

Data	Zmienna A [zł]	Data	Zmienna B [zł]	Data	Zmienna C [zł]	Data	Zmienna D [zł]
02.11.	350,00	05.11.	349,50	08.11.	347,00	13.11.	343,00
05.11.	349,50	08.11.	347,00	13.11.	343,00	16.11.	326,00
08.11.	347,00	13.11.	343,00	16.11.	326,00	19.11.	320,00
13.11.	343,00	16.11.	326,00	19.11.	320,00	22.11.	328,00
16.11.	326,00	19.11.	320,00	22.11.	328,00	26.11.	331,50
19.11.	320,00	22.11.	328,00	26.11.	331,50	29.11.	337,50

² *Metoda trendu pelzającego. Prognozowanie i symulacje*, <http://www.ekonometria.4me.pl/metoda-trendu-pelzajacego.htm> (dostęp 18.04.2019).

ciąg dalszy tabeli 2

Data	Zmienna A [zł]	Data	Zmienna B [zł]	Data	Zmienna C [zł]	Data	Zmienna D [zł]
22.11.	328,00	26.11.	331,50	29.11.	337,50	03.12.	341,50
26.11.	331,50	29.11.	337,50	03.12.	341,50	07.12.	330,50
29.11.	337,50	03.12.	341,50	07.12.	330,50	10.12.	327,50
03.12.	341,50	07.12.	330,50	10.12.	327,50	13.12.	346,50
07.12.	330,50	10.12.	327,50	13.12.	346,50	17.12.	330,50
10.12.	327,50	13.12.	346,50	17.12.	330,50	21.12.	315,50
13.12.	346,50	17.12.	330,50	21.12.	315,50	27.12.	319,00
17.12.	330,50	21.12.	315,50	27.12.	319,00	02.01.	330,50
21.12.	315,50	27.12.	319,00	02.01.	330,50	04.01.	328,00
27.12.	319,00	02.01.	330,50	04.01.	328,00	07.01.	335,00
02.01.	330,50	04.01.	328,00	07.01.	335,00	11.01.	337,50
04.01.	328,00	07.01.	335,00	11.01.	337,50	15.01.	327,00
07.01.	335,00	11.01.	337,50	15.01.	327,00	18.01.	343,00
11.01.	337,50	15.01.	327,00	18.01.	343,00	21.01.	343,00
15.01.	327,00	18.01.	343,00	21.01.	343,00	24.01.	341,50
18.01.	343,00	21.01.	343,00	24.01.	341,50	28.01.	347,00
21.01.	343,00	24.01.	341,50	28.01.	347,00	31.01.	341,50

Dla nadania cech prospektywnych wartości bilansowej można zastosować bardziej złożoną procedurę. W szczególności można określić wartość szacowaną jako warunkową wartość oczekiwaną $E(A|B = a_n)$, gdzie A i B to zmienne losowe, których wartości są określone na podstawie notowań akcji.

Przy tych ustaleniach dojście do wyniku, który uznaje się za teoretycznie uzasadnioną godziwą wartość bilansową akcji, obejmuje następujące kroki:

- 1) zestawienie ciągu notowań historycznych a_1, \dots, a_n ;
- 2) zestawienie z notowań w najprostszym przypadku układu wartości dwóch zmiennych losowych (A, B):

$$A: (a_1, \dots, a_n) \quad \text{i} \quad B: (a_2, \dots, a_n, a_{n+1});$$

- 3) określenie funkcji gęstości łącznego rozkładu zmiennych (A, B);
- 4) wyznaczenie funkcji regresji $R(a_n) = E(A|B = a_n)$:

$$E(A|B = a_n) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n-1} a_i h_i(a_n)}{\sum_{i=1}^{i=n-1} h_i(a_n)} \quad (3)$$

gdzie:

$h_i(a_n)$ jest gęstością rozkładu normalnego ze średnią a_i i wskazaną wyżej wariancją σ^2 .

W wyniku otrzymamy wartość wygładzoną, ukierunkowaną prospektywnie.

5) wykonanie obliczeń za pomocą estymatora $R(a_n)$.

Naturalna procedura wyceny przy włączeniu notowania (lub notowań) okresu następnego prowadzi do określenia wartości dwóch zmiennych losowych (A, B) na podstawie ciągu $n + 1$ notowań. Zatem zmienne losowe są określone pomiarami:

$$A: (a_1, \dots, a_n) \quad i \quad B: (a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$$

Na tej podstawie WWO jest określone wzorem:

$$E(A/B = a_{n+1}) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i h_i(a_{n+1})}{\sum_{i=1}^{i=n} h_i(a_{n+1})} \quad (4)$$

Naturalnie pojawia się także alternatywne podejście, w którym zmienne losowe (A, B) nie ulegają zmianie a pojawia się trzecia zmienna C. Wtedy mamy układ trzech zmiennych (A, B, C), gdzie A: (a_1, \dots, a_{n-1}) , B: (a_2, \dots, a_n) , C: $(a_3, \dots, a_n, a_{n+1})$. Formuła WWO przybiera postać:

$$E(A/B = a_n, C = a_{n+1}) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n-1} a_i h_i(a_n) h_i(a_{n+1})}{\sum_{i=1}^{i=n-1} h_i(a_n) h_i(a_{n+1})} \quad (5)$$

Zwiększanie liczby zmiennych losowych nie kończy się na układzie trójwymiarowym i może być dokonywane o ile wyniki wykazują znaczące różnice. Tę opinię ilustrują przedstawione dalej obliczenia.

4. Szacowanie godziwej wartości bilansowej akcji wybranej spółki

Przy uwarunkowaniu jedną zmienną B formuła obliczeniowa jest następująca:

$$F(b) = E(A/B = b) = E(A/B = 341,50 \text{ zł})$$

gdzie:

$b = 341,50$ zł jest notowaniem z 24/01/2019. Przy tych danych procedura zapewnia wyniki.

Tabela 3. Podstawowe statystyki zmiennych B, C, D

Wielkość	B	C	D
Liczba danych	23	23	23
Średnia arytmetyczna	333,58	333,45	333,16
Statystyka s^2	86,15	83,03	77,99
Wielkość σ_n	1,98	1,94	1,88

Liczby $\{h_i(b), h_i(c)\}$ są to wartości funkcji gęstości rozkładu normalnego. Korzystając z tablic wartości standardowej funkcji gęstości rozkładu normalnego otrzymujemy kolejne prawdopodobieństwa. Oblicza się ciąg liczb według przykładu $h_1(341,50) = \varphi((341,50 - 349,50)/1,98) = \varphi(-4,0404) = 0,0001$. Jest to znane podstawienie umożliwiające korzystanie z standardowej funkcji gęstości.

Tabela 4. Wagi i wartość $E(A/B = 341,50 \text{ zł})$

i	Zmienna A [zł]	Zmienna B [zł]	Zmienna t	$h = \varphi B(t)$	wagi w (407)	$a \times w$
1	350,00	349,50	-4,0404	0,0001	0,000055	0,02
2	349,50	347,00	-2,7778	0,0084	0,004602	1,61
3	347,00	343,00	-0,7576	0,2991	0,163854	56,86
4	343,00	326,00	7,8283	0,0000	0,000000	0,00
5	326,00	320,00	10,8586	0,0000	0,000000	0,00
6	320,00	328,00	6,8182	0,0000	0,000000	0,00
7	328,00	331,50	5,0505	0,0000	0,000000	0,00
8	331,50	337,50	2,0202	0,0519	0,028432	9,43
9	337,50	341,50	0,0000	0,3989	0,218527	73,75
10	341,50	330,50	5,5556	0,0000	0,000000	0,00
11	330,50	327,50	7,0707	0,0000	0,000000	0,00
12	327,50	346,50	-2,5253	0,0163	0,008930	2,92
13	346,50	330,50	5,5556	0,0000	0,000000	0,00
14	330,50	315,50	13,1313	0,0000	0,000000	0,00
15	315,50	319,00	11,3636	0,0000	0,000000	0,00
16	319,00	330,50	5,5556	0,0000	0,000000	0,00
17	330,50	328,00	6,8182	0,0000	0,000000	0,00
18	328,00	335,00	3,2828	0,0017	0,000931	0,31
19	335,00	337,50	2,0202	0,0519	0,028432	9,52
20	337,50	327,00	7,3232	0,0000	0,000000	0,00
21	327,00	343,00	-0,7576	0,2991	0,163854	53,58
22	343,00	343,00	-0,7576	0,2991	0,163854	56,20
23	343,00	341,50	0,0000	0,3989	0,218527	74,95
Suma				1,8254	1,000000	339,16

Obliczenia wydają oszacowanie:

$$F(b) = E(A/B = b) = E(A/B = 341,50 \text{ zł}) = \mathbf{339,16 \text{ zł}}$$

W układzie trzech zmiennych uwzględnia się także zmienną losową C. Zatem wartość średnia zmiennej losowej A będzie spełniała dwa następujące warunki:

$$F(b, c) = E(A/B = b, C = c) = E(A/B = 341,50 \text{ zł}, C = 347,00 \text{ zł})$$

Formuła warunkowej wartości jest przedstawiona poniżej:

$$F(b, c) = E(A/B = 341,50, C = 347,00) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \times h_i(341,50)h_i(347,00)}{\sum_{i=1}^n h_i(341,5)h_i(347,00)}$$

Czynniki wagowe $h_i(b)$, $h_i(c)$ są wartościami funkcji gęstości rozkładu normalnego. Wyniki obliczeń przedstawia tabela 5.

Tabela 5. Wagi i wartość $E(A/B = 341,50 \text{ zł}, C = 347,00)$

i	Zmienna A [zł]	Zmienna B [zł]	$h = \varphi B(t)$	Zmienna C [zł]	Zmienna t	$h = \varphi C(t)$	Iloczyn	Wagi w BC	Wartość a × w
1	350,00	349,50	0,0001	347,00	0,0000	0,3989	0,0000	0,000227	0,08
2	349,50	347,00	0,0084	343,00	2,0619	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
3	347,00	343,00	0,2991	326,00	10,8247	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
4	343,00	326,00	0,0000	320,00	13,9175	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
5	326,00	320,00	0,0000	328,00	9,7938	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
6	320,00	328,00	0,0000	331,50	7,9897	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
7	328,00	331,50	0,0000	337,50	4,8969	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
8	331,50	337,50	0,0519	341,50	2,8351	0,0071	0,0004	0,002094	0,69
9	337,50	341,50	0,3989	330,50	8,5052	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
10	341,50	330,50	0,0000	327,50	10,0515	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
11	330,50	327,50	0,0000	346,50	0,2577	0,3860	0,0000	0,000000	0,00
12	327,50	346,50	0,0163	330,50	8,5052	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
13	346,50	330,50	0,0000	315,50	16,2371	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
14	330,50	315,50	0,0000	319,00	14,4330	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
15	315,50	319,00	0,0000	330,50	8,5052	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
16	319,00	330,50	0,0000	328,00	9,7938	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
17	330,50	328,00	0,0000	335,00	6,1856	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
18	328,00	335,00	0,0017	337,50	4,8969	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
19	335,00	337,50	0,0519	327,00	10,3093	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
20	337,50	327,00	0,0000	343,00	2,0619	0,0478	0,0000	0,000000	0,00
21	327,00	343,00	0,2991	343,00	2,0619	0,0478	0,0143	0,081233	26,56
22	343,00	343,00	0,2991	341,50	2,8351	0,0071	0,0021	0,012066	4,14
23	343,00	341,50	0,3989	347,00	0,0000	0,3989	0,1591	0,904098	310,11
Suma			1,8254			1,2936	0,1760	1,000	341,58

$$F(b, c) = E(A/B = b, C = c) = E(A/B = 341,50 \text{ zł}, C = 347,00) = \mathbf{341,58 \text{ zł}}$$

Teraz zostanie uwzględniona zmienna losowa D. Zatem wartość średnia zmiennej losowej A będzie spełniała trzy następujące warunki:

$$F(b, c, d) = E(A/B = b, C = c, D = d) = E(A/B = 341,50 \text{ zł}, C = 347,00 \text{ zł}, D = 341,50 \text{ zł})$$

Formuła warunkowej wartości przedstawia się następująco:

$$F(b, c, d) = E(A/B = 341,50, C = 347,00, D = 341,50) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \times h_i(341,50)h_i(347,00)h_i(341,50)}{\sum_{i=1}^n h_i(341,50)h_i(347,00)h_i(341,50)}$$

Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 6.

Tabela 6. Wagi i wartość $E(A/B = 341,50 \text{ zł}, C = 347,00, D = 341,50 \text{ zł})$

i	Zmienna A [zł]	$h = \varphi B(t)$	$h = \varphi C(t)$	Zmienna D [zł]	Zmienna t	$h = \varphi D(t)$	Iloczyn	Wagi w BCD	Wartość a × w
1	350,00	0,0001	0,3989	343,00	-0,7979	0,2899	0,0000	0,000167	0,06
2	349,50	0,0084	0,0000	326,00	8,2447	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
3	347,00	0,2991	0,0000	320,00	11,4362	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
4	343,00	0,0000	0,0000	328,00	7,1809	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
5	326,00	0,0000	0,0000	331,50	5,3191	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
6	320,00	0,0000	0,0000	337,50	2,1277	0,0412	0,0000	0,000000	0,00
7	328,00	0,0000	0,0000	341,50	0,0000	0,3989	0,0000	0,000000	0,00
8	331,50	0,0519	0,0071	330,50	5,8511	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
9	337,50	0,3989	0,0000	327,50	7,4468	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
10	341,50	0,0000	0,0000	346,50	-2,6596	0,0117	0,0000	0,000000	0,00
11	330,50	0,0000	0,3860	330,50	5,8511	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
12	327,50	0,0163	0,0000	315,50	13,8298	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
13	346,50	0,0000	0,0000	319,00	11,9681	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
14	330,50	0,0000	0,0000	330,50	5,8511	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
15	315,50	0,0000	0,0000	328,00	7,1809	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
16	319,00	0,0000	0,0000	335,00	3,4574	0,0009	0,0000	0,000000	0,00
17	330,50	0,0000	0,0000	337,50	2,1277	0,0412	0,0000	0,000000	0,00
18	328,00	0,0017	0,0000	327,00	7,7128	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
19	335,00	0,0519	0,0000	343,00	-0,7979	0,2899	0,0000	0,000000	0,00
20	337,50	0,0000	0,0478	343,00	-0,7979	0,2899	0,0000	0,000000	0,00
21	327,00	0,2991	0,0478	341,50	0,0000	0,3989	0,0057	0,082414	26,95
22	343,00	0,2991	0,0071	347,00	-2,9255	0,0055	0,0000	0,000169	0,06
23	343,00	0,3989	0,3989	341,50	0,0000	0,3989	0,0635	0,917246	314,62
Suma		1,8254	1,2936			2,1669	0,0692	1,000	341,68

$$F(b, c, d) = E(A/B = b, C = c, D = d) = \\ = E(A/B = 341,50 \text{ zł}, C = 347,00 \text{ zł}, D = 341,50 \text{ zł}) = \mathbf{341,68}$$

W tradycyjnym podejściu szacuje się wartość na koniec roku a nie na koniec wybranego okresu po dacie bilansu. Przedstawione algorytmy umożliwiają szacowanie na dowolny wybrany moment. Jeśli przyjmiemy datę notowania 2 stycznia jako najbliższe do daty końca roku, to wartość średnia zmiennej losowej A przedstawia się następująco:

$$F(b, c, d) = E(A/B = b, C = c, D = d) = \\ = E(A/B = 315,50 \text{ zł}, C = 319,00 \text{ zł}, D = 330,50 \text{ zł})$$

gdzie:

wartość zmiennej B jest notowaniem z dnia 21 grudnia 2018 r., C – notowaniem z dnia 27 grudnia 2018 r., D – notowaniem z dnia 02 stycznia 2019 r. Formuła warunkowej wartości przedstawia się następująco:

$$F(b, c, d) = E(A/B = 315,50, C = 319,00, D = 330,50) = \\ = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \times h_i(315,50)h_i(319,00)h_i(330,50)}{\sum_{i=1}^n h_i(315,50)h_i(319,00)h_i(330,50)}$$

Wyniki obliczeń zawiera tabela 7.

Tabela 7. Wagi i wartość $E(A/B = 315,50 \text{ zł}, C = 319,00 \text{ zł}, D = 330,50 \text{ zł})$

i	Zmienna A [zł]	$h = \varphi B(t)$	$h = \varphi C(t)$	$h = \varphi D(t)$	Iloczyn	Wagi w BCD	Wartość a x w
1	350,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
2	349,50	0,0000	0,0000	0,0230	0,0000	0,000000	0,00
3	347,00	0,0000	0,0006	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
4	343,00	0,0000	0,3493	0,1648	0,0000	0,000000	0,00
5	326,00	0,0303	0,0000	0,3465	0,0000	0,000000	0,00
6	320,00	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	0,000000	0,00
7	328,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
8	331,50	0,0000	0,0000	0,3989	0,0000	0,000000	0,00
9	337,50	0,0000	0,0000	0,1113	0,0000	0,000000	0,00
10	341,50	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
11	330,50	0,0000	0,0000	0,3989	0,0000	0,000000	0,00
12	327,50	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
13	346,50	0,0000	0,0789	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
14	330,50	0,3989	0,3989	0,3989	0,0635	0,999582	330,36

ciąg dalszy tabeli 7

i	Zmienna A [zł]	$h = \varphi B(t)$	$h = \varphi C(t)$	$h = \varphi D(t)$	Iloczyn	Wagi w BCD	Wartość $a \times w$
15	315,50	0,0832	0,0000	0,1648	0,0000	0,000000	0,00
16	319,00	0,0000	0,0000	0,0230	0,0000	0,000000	0,00
17	330,50	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	0,000000	0,00
18	328,00	0,0000	0,0000	0,0707	0,0000	0,000000	0,00
19	335,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
20	337,50	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
21	327,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
22	343,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
23	343,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000000	0,00
Suma		0,5124	0,8277	2,1016	0,0635	1,000	330,36

$$F(b, c, d) = E(A/B = b, C = c, D = d) = \\ = E(A/B = 315,50 \text{ zł}, C = 319,00 \text{ zł}, D = 330,50 \text{ zł}) = \mathbf{330,36 \text{ zł}}$$

Jak się okazuje, wartość wygładzona z notowań obliczona na dzień 2 stycznia 2019 roku jest zbliżona do notowania rzeczywistego. Wiąże się to z tym, że nieobciążony estymator wariancji jest wielkością małą $s^2/(n-1)$.

Trzecie podejście najnowsze prowadzi do wyceny akcji przez najprostsze wygładzenie rzeczywistych wyników. Warto zwrócić uwagę, że nie zawsze istnieje wartość na 31 grudnia ze względu na to, że giełda nie musi być czynna. W przypadku notowań akcji spółki KĘTY ostatnie notowanie pochodzi z 27 grudnia 2018 roku (kwota 319 zł). Naturalne jest zatem uwzględnienie przy wygładzaniu notowania z 02 stycznia 2019 roku (330,5 zł). Uwzględniając układ tylko dwóch zmiennych losowych A i B otrzymuje się oszacowanie wartości godziwej 332,38 zł. Wyniki zawiera tabela 8.

Tabela 8. Wagi i wartość $E(A/B = 330,50 \text{ zł})$

i	Zmienna A [zł]	Zmienna B [zł]	Zmienna t	$h = \varphi B(t)$	wagi w (407)	$a \times w$
1	350,00	349,50	-8,6758	0,0000	0,000000	0,00
2	349,50	347,00	-7,5342	0,0000	0,000000	0,00
3	347,00	343,00	-5,7078	0,0000	0,000000	0,00
4	343,00	326,00	2,0548	0,0484	0,024554	8,42
5	326,00	320,00	4,7945	0,0000	0,000000	0,00
6	320,00	328,00	1,1416	0,2081	0,105570	33,78
7	328,00	331,50	-0,4566	0,3595	0,182376	59,82
8	331,50	337,50	-3,1963	0,0024	0,001218	0,40

i	Zmienna A [zł]	Zmienna B [zł]	Zmienna t	$h = \varphi B(t)$	wagi w (407)	$a \times w$
9	337,50	341,50	-5,0228	0,0000	0,000000	0,00
10	341,50	330,50	0,0000	0,3989	0,202364	69,11
11	330,50	327,50	1,3699	0,1561	0,079190	26,17
12	327,50	346,50	-7,3059	0,0000	0,000000	0,00
13	346,50	330,50	0,0000	0,3989	0,202364	70,12
14	330,50	315,50	6,8493	0,0000	0,000000	0,00
15	315,50	319,00	5,2511	0,0000	0,000000	0,00
16	319,00	330,50	0,0000	0,3989	0,202364	64,55
Suma				1,9712	1,000000	332,38

5. Podsumowanie i wnioski

Badania dotyczyły poszukiwania algorytmu bilansowej wyceny lokat akcji w aspekcie wartości godziwej. Istota rachunkowości wymaga, aby były uwzględnione dane rzeczywiste pochodzące z notowań giełdowych. Proponowana metoda wykorzystuje podejście statystyki nieparametrycznej i wybór normalnej funkcji jądra. Zastosowano trzy podejścia do szacowania wartości godziwej: (a) obliczenie wartości godziwej na podstawie danych z końca roku sprawozdawczego, (b) obliczenie wartości godziwej na koniec roku, ale po dołączeniu danych z miesiąca stycznia, (c) obliczenie wartości godziwej na koniec okresu notowań dołączonych, w tym przypadku 31 stycznia 2019 roku. Szacunek godziwej wyceny bilansowej przedstawia się odpowiednio: (a) 332,38 zł; (b) 330,36 zł; (c) 341,68 zł, przy czym bieżąca wartość z 02.01.2019 roku jest 330,50 zł.

Ideą przedstawionego w artykule modelu było dostarczenie odbiorcy wyceny lokaty akcyjnej najbardziej odpowiedniej do jego oczekiwań informacji sprawozdawczej, co przemawia o jego przydatności w praktyce. Tym niemniej należy odnieść się do zasad wyceny bilansowej lokat w akcjach z podziałem na lokaty krótkoterminowe i kapitałowe. W pierwszym przypadku nasuwa się wniosek, aby jako wartość godziwą wyceny przyjąć kwotę 332,38 zł wygładzoną regresją nieparametryczną, obliczoną na podstawie danych do drugiego stycznia roku następnego włącznie. Natomiast wartość obliczoną na koniec stycznia (341,68 zł) proponuje się umieścić w informacji dodatkowej, aby korzystający ze sprawozdania uzyskał pogląd odnośnie do trendu. Niewielka różnica 1,88 zł zwiększy wartość konta „Przychody finansowe”. Proponowana procedura jest w dużym stopniu zgodna z zasadą skorygowaną stosownie do rozważań o istocie wartości godziwej przedstawionych w opracowaniu. W przypadku lokaty kapitałowej proponuje się wyżej opisaną procedurę, z tym że kwotę 1,88 zł księguje się na koncie „Odpisy aktualizujące długoterminowe aktywa finansowe”.

Literatura

- Anthony R., Hawkins D., Merchant K. (2011), *Accounting. Text and cases*, McGraw-Hill/Irwin, New York.
- Bielawski P. (2013), *Wycena bilansowa akcji w teorii i praktyce rachunkowości*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
- Dobija M. (1982), *Analityczna dystrybuanta empiryczna*, „Przegląd Statystyczny”, 1/2, s. 207–219.
- Dobija M. (1988), *Metoda empirycznych miar prawdopodobieństwa w rachunkowości*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Seria specjalna: Monografie, nr 84, Kraków.
- Dobija M. (1989), *Dowolnie uwarunkowane wartości średnie narzędziem rachunkowości zarządczej*, „Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Krakowie”, 305, s. 297–313.
- Dobija M. (2009), *Natura i piękno zapisu podwójnego*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, 796, s. 5–20.
- Dobija M. (2018), *Ekonomiczne konsekwencje konfrontacji kapitału i pracy*, „Nierówności Społeczne a Wzrost Gospodarczy”, 54, DOI: 10.15584/nsawg.2018.2.4.
- Hołda A. (2013), *Determinanty ustalania wartości godziwej w rachunkowości w kontekście kryzysów finansowych*, „Nierówności Społeczne a Wzrost Gospodarczy”, 30, s. 138–150.
- Ijiri Y. (1993), *The Beauty of Double-Entry Bookkeeping and Its Impact on the Nature of Accounting Information*, „Economic Notes”, 22 (2), s. 265–285.
- Jędrzejczyk M. (2008), *Wycena bilansowa lokat kapitałowych w aspekcie „true and fair view”*, „Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania”, 9, s. 566–573.
- Jędrzejczyk M. (2011), *Wycena długoterminowych aktywów finansowych w aspekcie true and fair view*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, 861, s. 81–87.
- Kurek B., Dobija M. (2013), *Scientific Provenance of Accounting*, „International Journal of Accounting and Economic Studies”, 1 (2), s. 16–24.
- Międzynarodowe Standardy Sprawozdawczości Finansowej*, Stowarzyszenie Księgowych w Polsce, Warszawa 2016.
- Renkas J. (2011), *Finansowa ożetność w usłowijach inflacji*, [w]: F. Butynec (red.), *Nowyje koncepcii rozwitija buhalterskiego uczeta, analiza i kontrola w usłowijach ekonomiczeskich izmienienij*, cz. 1, ZhDTU, Zhytomyr, s. 120–137.
- Rówińska M. (2011), *Wartość godziwa w rachunkowości finansowej i osłonowej w zakresie instrumentów finansowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Śnieżek E., Wiatr M. (2010), *Wybrane aspekty odwzorowania zasady true and fair view w bilansie XXI wieku*, „Studia i Prace Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, 14, t. 2, s. 249–259.

Źródła internetowe

- Metoda trendu pelzającego. Prognozowanie i symulacje*, <http://www.ekonometria.4me.pl/metoda-trendu-pelzajacego.htm> (dostęp 18.04.2019).